

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ГРУППОВОГО ОБУЧЕНИЯ

©2016 Китаев Д.Ф., Макаров А.А., Смольников С.Д.

ЧОУ ВО «Международный институт рынка», г.Самара, Россия

Статья посвящена дальнейшему исследованию ранее предложенной авторами нелинейной модели группового обучения [1-2]. Показано, что для использования в практических приложениях необходимо идентифицировать параметры модели, а подобные задачи по причине нелинейности являются задачами нелинейного регрессионного анализа. В работе предложен вариант решения проблемы, который заключается в параметрической идентификации систем дифференциальных уравнений, представленных в разностном виде. В этом случае задача сводится к задаче идентификации параметров модели авторегрессионного типа (AR-модели). Подробно представлены соответствующие разностные уравнения, а также предложен метод нахождения решений в случае, если матрица регрессоров является плохо обусловленной вследствие неполноты данных или их искажения. Приведен пример использования представленной методики идентификации параметров модели.

Ключевые слова: соционика, математическая модель обучения, имитационное моделирование, идентификация параметров, авторегрессионные модели, разностные уравнения, плохо обусловленные задачи.

В работах [1-2] была предложена нелинейная модель обучения в группе, построенная на базе соционики и включающая две переменных и шесть параметров:

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = \alpha_1 P - \alpha_2 J - \alpha_3 PJ \\ \frac{dP}{dt} = \beta_1 P - \beta_2 P^2 - \beta_3 PJ \end{cases} \quad (1),$$

где $J(t)$ – обучающая информация, доставляемая в группу в процессе обучения, $P(t)$ – степень организованности обучения.

Члены, стоящие в правых частях уравнений, описывают, соответственно:

$\alpha_1 P$ – описывает приток обучающей информации за счет лучшей организации обучения;

$\alpha_2 J$ – учитывает эффект устаревания информации, а также эффект «информационного переполнения»;

$\alpha_3 PJ$ – учитывает процесс ограничения потока информации за счет психофизиологического предела ее усвоения (эффект «насыщения информацией»);

$\beta_1 P$ – описывает процесс самоорганизации в группах;

$\beta_2 P^2$ – учитывает потерю организованности за счет непроизводительных контактов учащихся между собой;

$\beta_3 PJ$ – описывает взаимодействие обучающихся с информацией.

В работе [2] показано, что нетривиальное решение ($J \neq 0$, $P \neq 0$) устойчиво при положительных значениях всех параметров. Однако для использования модели в реальной практической работе необходимо решить два важных вопроса, которые остались за рамками статей [1-2]:

1. Как и в каких единицах измерять переменные J и P ?

2. Как идентифицировать значения параметров α и β ?

Прежде всего понятно, что величины J и P удобнее измерять в относительных единицах с нормировкой в интервале от 0 до 1. Существует достаточно много разработанных методик оценки степени усвоения предоставляемой информации при обучении. Это различные виды тестирования и анкетирования студентов, опросы и т.д.

Несколько труднее ситуация с измерениями величины P . Очевидным является только то, что значения этой переменной определяется двумя группами факторов: внешними и внутренними.

К первым относятся такие факторы, как наличие достаточного числа аудиторий с установленным оборудованием (например, компьютерами), наличие соответствующего методического обеспечения (библиотеки, укомплектованные литературой, программное обеспечение, электронные конспекты и т.п.), квалифицированный состав преподавателей и т.п. Эти факторы для большинства вузов выполнены (иначе вуз не получил бы аккредитации). В любом случае имеются достаточно разработанные методики формальной оценки этих факторов.

К внутренним факторам можно отнести: способность группы консолидироваться на целях обучения, психологический микроклимат, общий интеллектуальный уровень и т.п. Для оценки этих факторов используют инструментарий соционики, психологические тесты, а также разнообразные модели. Обширный набор подобных моделей приведен в работах [3,7,8,9].

Перейдем ко второму вопросу об идентификации параметров модели. Модель (1) является нелинейной по входным и выходным переменным, поэтому соответствующая задача параметризации в общем случае является задачей нелинейного регрессионного анализа. Существует несколько возможных подходов к решению такого рода задач. На наш взгляд, одним из наиболее простых и корректных в вычислительном отношении способов является способ параметрической идентификации, основанный на представлении систем дифференциальных уравнений в разностном виде. В этом случае задача сводится к задаче идентификации параметров модели авторегрессионного типа (AR-модели).

Для AR-моделей (см., например, монографию [4]) разработаны эффективные алгоритмы решений,

позволяющие скомпенсировать многие недостатки, присущие регрессионным моделям вообще и нелинейным регрессионным моделям в особенности. Кроме того, для AR-моделей разработаны методы нахождения решений в условиях неполной информации в отношении задания правых частей системы уравнений, а также при наличии стохастических помех, отражающих влияние случайных неучтенных факторов при соответствующих измерениях величин J и P .

Пусть значения переменных $J(t)$ и $P(t)$ известны (измерены) в дискретные моменты времени $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, \dots, t_0+k\Delta t$, с равномерным шагом по Δt . В качестве Δt можно взять месяц, семестр, год. Обозначим $J_k = J(t_0+k\Delta t)$, $P_k = P(t_0+k\Delta t)$. Тогда на основании системы (1) можно получить следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} J_{k+1} = a_1 J_k + a_2 P_k + a_3 P_k J_k \\ P_{k+1} = b_1 P_k + b_2 P_k^2 + b_3 P_k J_k \end{cases} \quad (2)$$

$$a_1 = (1 - \alpha_2 \Delta t); \quad a_2 = \alpha_1 \Delta t;$$

$$\text{где: } a_3 = -\alpha_3 \Delta t; \quad b_1 = (1 + \beta_1 \Delta t);$$

$$b_2 = -\beta_2 \Delta t; \quad b_3 = -\beta_3 \Delta t.$$

Введем вектор неизвестных параметров этого уравнения $\vec{G}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Пусть k – объем экспериментальных данных по наблюдениям за переменными J и P , то есть число двоек вида $\{J_1, P_1\}, \{J_2, P_2\}, \dots, \{J_k, P_k\}$. Тогда первое уравнение системы (1) можно записать так:

$$\hat{A} \vec{G}_1 = \vec{f} \quad (3),$$

где $\vec{f} = \{J_2, J_3, \dots, J_{k+1}\}^T$, а матрица A имеет вид:

$$\hat{A}_j = \begin{bmatrix} J_1 & P_1 & J_1 P_1 \\ J_2 & P_2 & J_2 P_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ J_k & P_k & J_k P_k \end{bmatrix}$$

Точно такое уравнение (3) можно записать и для вектора $\vec{G}_2 = b_1, b_2, b_3$, но в этом случае вектор $\vec{f}$ и матрица A будут иметь вид: $\vec{f} = \{P_1, P_2, \dots, P_{K+1}\}^T$

$$\hat{A}_p = \begin{bmatrix} P_1 & P_1^2 & J_1 P_1 \\ P_2 & P_2^2 & J_2 P_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ P_k & P_k^2 & J_k P_k \end{bmatrix}$$

Для решения задачи (3) можно воспользоваться методом наименьших квадратов, который наиболее часто используется в прикладном регрессионном анализе. При этом надо иметь в виду, что точное решение системы (3) методом обратной матрицы, то есть решение в виде $\vec{G} = \hat{A}^{-1} \vec{f}$, как правило, не может быть реализовано, поскольку матрица A часто является вырожденной. В этом случае обратная матрица не существует, но даже если она формально и может быть найдена, то из-за плохой обусловленности исходной матрицы A такое решение при реализации на ЭВМ дает огромные ошибки в вычислениях. Поэтому в соответствии с теорией плохо обусловленных вычислений вместо неустойчивого точного решения системы (3) находится устойчивое псевдорешение, которое определяется как минимальная евклидова норма невязок на всем множестве возможных решений G [5]:

$$\vec{G} = \arg \min_{G \in R^n} \|\hat{A}\vec{G} - \vec{f}\|_2^2,$$

где матрица регрессоров A в реальных прикладных задачах, как правило, является плохо обусловленной. Для нахождения псевдорешений в этом случае используются различные методы регуляризации исходной системы (3), например, G можно найти из уравнения Эйлера:

$$(\alpha E_n + A^T A) \vec{G} = A^T \vec{f},$$

где E_n – единичная матрица, T – символ транспонирования. Другие варианты, например, гребневая регуляризация,

апостериорная регуляризация и другие, приведены в монографии [6].

Рассмотрим пример. Пусть по результатам измерений в течение четырех промежутков времени (месяцы, семестры и т.п.) были зафиксированы следующие значения переменных: $J = \{0,8 \ 0,8 \ 0,9 \ 0,9\}$, $P = \{0,5 \ 0,6 \ 0,6 \ 0,6\}$. Сформируем соответствующие матрицы и векторы $\vec{f}$:

$$\hat{A}_J = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 & 0,48 \\ 0,9 & 0,6 & 0,54 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_p = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,4 \\ 0,6 & 0,36 & 0,48 \\ 0,6 & 0,36 & 0,54 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}_J = \{0,8 \ 0,9 \ 0,9\}^T, \quad \vec{f}_p = \{0,6 \ 0,6 \ 0,6\}^T$$

В данном случае матрицы оказались хорошо обусловленными, и можно найти решение стандартным способом с использованием алгоритма обратной матрицы.

Векторы G_1 и G_2 легко находятся:

$$\vec{G}_1 = \{a_1, a_2, a_3\} = \{0,375 \ 1,5 \ -0,625\}$$

$$\vec{G}_2 = b_1, b_2, b_3 \} \{2,2 \ 2,0 \ 0.\}$$

Используя соотношения (2), находим параметры системы (1):

$$\alpha_1 = 1,5; \alpha_2 = 0,625; \alpha_3 = 0,625;$$

$$\beta_1 = 1,2; \beta_2 = 2,0; \beta_3 = 0$$

На рисунке 1 приведена фазовая диаграмма зависимости $J(P)$, полученная в результате моделирования системы (1) в пакете AnyLogic 6.9. Из рисунка видно, что решение системы (1) с найденными параметрами устойчиво и сходится к значениям, близким к значениям, полученным в результате измерений переменных J и P . Теперь, после идентификации параметров, модель можно использовать для прогнозирования эффективности группового обучения.

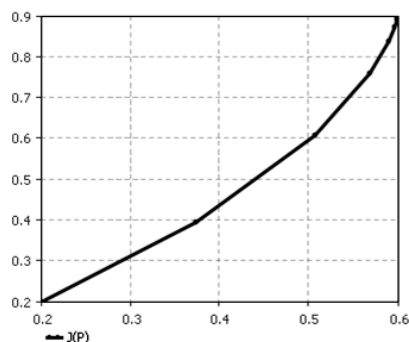


Рисунок 1 - Фазовая диаграмма $J(P)$

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Китаев Д.Ф., Макаров А.А., Смольников С.Д. Имитационная модель оценки эффективности обучения в группе // Вестник Международного института рынка. 2015, № 2. С.92-98.
2. Китаев Д.Ф., Макаров А.А., Смольников С.Д. Анализ имитационной модели оценки эффективности обучения в группе // Вестник Международного института рынка. 2016, № 1. С.206-210
3. Колесин И.Д. Принципы моделирования социальной самоорганизации: Учебное пособие. – СПб.: Из-во «Лань», 2013.
4. Кашьяп Р.Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. – М.: Наука, 1983.
5. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – М.: Из-во МГУ, 1987.
6. Тихонов А.Е., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука., 1979.
7. Хаймович И.Н. Методика интегральной оценки эффективности квалификации специалиста // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С.435.
8. Хаймович И.Н., Дровяников В.И., Чумак В.Г. Математический аппарат для выбора стратегии вуза в конкурентной среде // Научное обозрение. №4. 2012. С.388-392.
9. Хаймович И.Н., Дровяников В.И. Моделирование конкурентного взаимодействия вузов на рынке образовательных услуг // Вестник Самарского государственного экономического университета. №1 (63). 2010. С.26-29.

IDENTIFICATION OF PARAMETERS IN GROUP LEARNING MODEL

© 2016 Dmitry F. Kitaev, Alexey A. Makarov, Sergei D. Smolnikov

International Market Institute, Samara, Russia

The article is devoted to further exploration of a previously proposed nonlinear model of group learning [1-2]. It is shown that for its use in practical applications it is necessary to identify the model parameters, and such tasks, because of the nonlinearity, are tasks for nonlinear regression analysis. The article proposes the solution to the problem, which lies in the parametric identification of systems of differential equations presented in differential form. In this case, the problem reduces to the problem of identification of parameters of models of autoregressive type (AR-model). The article shows in detail the corresponding difference equations and the authors propose the method of finding solutions in the case if the matrix of regressors is ill- conditioned due to the incompleteness or distortion. The article gives an example of using presented method of parameter identification of the model.

Key words: socionics, model of mathematical learning, simulation, parameter identification, autoregressive models, differential equations, ill-conditioned problem.